

**O que veremos
neste curso**



- 1. Conceitos Matemáticos Básicos**
- 2. Conceitos Fundamentais da Matemática Financeira**
- 3. Capitalização Simples**
- 4. Capitalização Composta**
- 5. Taxa de Juros**
- 6. Desconto**
- 7. Planos Equivalentes De Financiamentos**
- 8. Desconto de Fluxos de Caixa**

Conceitos Básicos



Potenciação

Potência é todo número na forma a^n , com $a \neq 0$.

a é a **base**, n é o **expoente** e a^n é a **potência**.

$$a^n = a \cdot a \cdot a \cdot a \dots a \text{ (n vezes)}$$

Todo número elevado a **0** é igual a **1**, $a^0 = 1$ e todo número elevado a **1** é igual a ele próprio, $a^1 = a$.

Exemplos: $5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$ $54^0 = 1$ $2^1 = 2$

$$(1 + 0,1)^2 = 1,1^2 = 1,1 \cdot 1,1 = 1,21$$

Regra de Três

Como transformar 1,25 ano em meses:

ano	meses
1	12
1,25	X

$$1 \cdot X = 1,25 \cdot 12$$

$$X = 15 \text{ meses}$$

Expressões Numéricas

As operações devem ser efetuadas respeitando-se a seguinte ordem:

- 1) Potenciações e radiciações, se houver.
- 2) Multiplicações e divisões, se houver.
- 3) Adições e subtrações

Exemplo: $150 + 100 \cdot (1,03)^2 = 150 + 100 \cdot 1,0609 = 150 + 106,09 = 256,09$

Equação

$$2 \cdot x - 1 = 9$$

$$2 \cdot x = 9 + 1$$

$$2 \cdot x = 10$$

$$x = \frac{10}{2}$$

$$x = 5$$

Porcentagem

É uma razão expressa por uma fração cujo denominador igual a 100.

Assim: $\frac{2}{5} = \frac{40}{100}$, que se lê “quarenta por cento” e pode-se representar por 40% (forma percentual)

ou por 0,40 (forma unitária).

$$\frac{40}{100} = 40\% = 0,40$$

Fator de Aumento = $1 + i$

Supondo aumento de 20%: Novo Preço = $100\% + 20\% = 120\% = 1,20$

Exemplo: O preço de um produto que custava R\$ 30,00 sofreu um aumento de 20%. Para se calcular o novo preço basta multiplicar 30 por $(1 + 0,20)$.

$$\text{Novo preço} = 30 \cdot (1,2) = 36$$

Fator de Redução = $1 - i$

Supondo redução de 10%: Novo Preço = $100\% - 10\% = 90\% = 0,90$

Exemplo: O preço de um produto que custava R\$ 30,00 sofreu um desconto de 10%. Para se calcular o novo preço basta multiplicar 30 por $(1 - 0,10)$.

Novo preço = $30 \cdot 0,90 = 27$

Fator de ganho real = (fator de ganho aparente) ÷ (fator de inflação)

Exemplo: Uma aplicação, em que o rendimento num mês foi de 1,808%, teve um ganho real de 0,8%. Determine a taxa de inflação naquele mês.

$(1 + 0,008) = (1 + 0,01808) \div (\text{fator de inflação})$

$$1,008 = \frac{1,01808}{\text{fator de inflação}} \rightarrow \text{fator de inflação} = \frac{1,01808}{1,008}$$

fator de inflação = $1,01 = (1 + 0,01)$. Então a taxa de inflação = $0,01 = 1\%$

CONCEITOS FUNDAMENTAIS

Matemática Financeira: estudo do valor no tempo.

Valor Presente (VP): qualquer valor expresso em moeda disponível em determinada época. Também chamado de Capital (C) ou Capital Inicial ou Principal (P).

Juros (J): é o rendimento em dinheiro, proporcionado pela utilização de uma quantia monetária, por certo período de tempo. $J = VF - VP$

Taxa de Juros (i) : é um coeficiente que corresponde à razão entre os juros pagos ou recebidos e o capital inicial. Exemplo: Seja um capital de R\$ 80,00, que aplicado por um certo período receba de juros R\$ 20,00. A Taxa de Juros será $i = \frac{20}{80} = 0,25 = 25\%$.

Valor Futuro (VF): é a soma do Valor Presente com os Juros. Também chamado de Montante (M) ou Capital Final ou Valor de Resgate.

Regimes de Capitalização: quando um capital é emprestado ou investido, o montante pode ser calculado de acordo com 2 regimes de capitalização de juros:

- **Capitalização Simples:** somente o capital inicial rende juros. O regime de capitalização simples é muito utilizado em países com baixo índice de inflação e custo real do dinheiro baixo; no entanto, em países com alto índice de inflação ou custo financeiro real elevado, a exemplo do Brasil, a utilização de capitalização simples só é recomendada para aplicações de curto prazo.
- **Capitalização Composta:** os juros produzidos ao final de um período são somados ao montante do início do período seguinte e essa soma passa a render juros no período seguinte e assim sucessivamente.

Fluxo de Caixa: conjunto de entradas e saídas de dinheiro ao longo de um determinado período.

- Seta para baixo indica valores emprestados, ou investidos, ou cedidos, ou aplicados -> saída de caixa (valor negativo)
- Seta para cima indica o montante, ou valor de resgate, ou valor futuro, ou valor capitalizado -> entrada de caixa (valor positivo)

CAPITALIZAÇÃO SIMPLES

$$J = C.i.t$$

$$M = C + J \Rightarrow M = C + C.i.t \Rightarrow M = C.(1+i.t)$$

t = número de períodos

Exemplo:

$$\text{ou } VF = VP.(1+i.t)$$

1. Qual o valor dos juros correspondentes a um empréstimo de R\$ 10.000,00, pelo prazo de 15 meses, sabendo-se que a taxa cobrada é de 3% ao mês?

$$C = 10.000,00 \quad n = 15 \text{ meses} \quad i = 3\% = \frac{3}{100} = 0,03 \quad J = ? \quad J = C . i . t$$
$$J = 10.000 . 0,03 . 15 = 4.500$$

2. Um capital de R\$ 25.000,00, aplicado durante 10 meses, rende juros de R\$ 5.000,00. Determinar a taxa correspondente.

$$C = 25.000,00 \quad J = 5.000,00 \quad n = 10 \text{ meses} \quad i = ? \quad J = C . i . t$$

$$i = \frac{J}{C.t} = \frac{5000}{25000.10} = 0,02 \text{ ou } 2\% \text{ a. m.}$$

3. Qual o capital que, à taxa de 2,5% ao mês, rende juros de R\$ 18.000,00 em 3 anos?

Resp: R\$ 20.000,00

4. Em que prazo uma de aplicação de R\$ 35.000,00 pode gerar um montante de R\$ 44.187,50, considerando-se uma taxa de 15% ano?

Resp: 21 meses

5. Um capital emprestado gerou R\$ 96.720,00 de juros. Sabendo-se que o prazo de aplicação foi de 13 meses e a taxa de juros foi de 2% ao mês, calcular o valor do montante.

Resp: R\$ 468.720,00

CAPITALIZAÇÃO COMPOSTA

$$M = C.(1+i)^t \quad \text{ou} \quad VF = VP.(1+i)^t \quad t = nper = \text{número de períodos}$$

6. Qual o montante de uma aplicação de R\$ 15.000,00, pelo prazo de 9 meses, à taxa de 2% ao mês?

$$C = 15.000,00 \quad t = 9 \quad i = 2\% = 0,02 \quad M = ?$$

$$M = 15.000 . (1 + 0,02)^9 = 15.000 . 1,02^9 = 15.000 . 1,19509 = 17.926,35$$

Algumas Funções Financeiras do Excel:

VP (taxa ; nper ; pgto ; vf ; tipo) = principal, valor presente ou valor atual, que corresponde ao capital inicial empregado. Trata-se, portanto, do valor do fluxo de caixa colocado no ponto zero da escala de tempo;

VF (taxa ; nper ; pgto ; vp ; tipo) = valor futuro ou montante, que corresponde ao valor do fluxo de caixa colocado no final do período;

TAXA (nper ; pgto ; vp ; vf ; tipo ; estimativa) = taxa de juros em cada período de capitalização, fornecida em porcentagem e sempre mencionando a unidade de tempo considerada;

NPER (taxa ; pgto ; vp ; vf ; tipo) = número de períodos de capitalização.

Com referência às convenções adotadas devemos destacar:

- Os valores de **nper** e **taxa** devem ser sempre informados em unidades compatíveis, a saber:
 - se **nper** estiver em meses, então **taxa** deve ser necessariamente em % ao mês;
 - se **nper** estiver em dias, então **taxa** deve ser em % ao dia, e assim por diante.
- O valor de **nper** não precisa ser um número inteiro, ou seja, pode ser um valor fracionário para nper. Dessa forma, a taxa de juros (**taxa**) pode ser informada , por exemplo, em % ao ano, e nper pode ser fornecido em fração decimal de ano.
- Devemos colocar o sinal negativo (-) nas parcelas que corresponderem a uma saída de caixa (desembolso) e colocar um sinal positivo (+) nas parcelas que corresponderem a uma entrada de caixa (recebimento). As parcelas sem sinal são valores positivos.

7. No final de 2 anos, o Sr. Carlos deverá efetuar um pagamento de R\$ 200.000,00 referente ao valor de um empréstimo contraído hoje, mais os juros devidos, correspondente a uma taxa de 3,5% ao mês. Qual o valor emprestado?

Resp: R\$ 87.591,43

8. A loja “Tem Tudo” financia um bem de consumo de uso durável no valor de R\$ 16.000,00, sem entrada, para pagamento em uma única prestação de R\$ 52.512,15 no final de 27 meses. Qual a taxa mensal cobrada pela loja?

Resp: 4,5%

9. Em que prazo um empréstimo de R\$ 55.000,00 pode ser quitado em um único pagamento de R\$ 110.624,65, sabendo-se que a taxa contratada é de 15% ao semestre?

Resp: 5 semestres

TAXAS DE JUROS

- Efetiva, real ou capitalizada = a unidade de referência de seu tempo coincide com a unidade de tempo dos períodos de capitalização.
Ex.: 3% ao mês, capitalizados mensalmente.
- Nominal = a unidade de referência de seu tempo não coincide com a unidade de tempo dos períodos da capitalização. É uma taxa de juros simples. Deve-se transformar esta taxa para a taxa efetiva.

Ex.: 12% ao ano, capitalizados mensalmente, significa uma taxa efetiva de $\frac{12\% \text{a.a.}}{12 \text{ meses}} = 1\% \text{ ao mês}$

Quando duas ou mais taxas, ao serem aplicadas a um mesmo principal, durante um mesmo prazo, produzirem um mesmo montante acumulado no final daquele prazo:

- no regime de juros simples, são ditas Proporcionais.

$$i_a = i_s \times 2 = i_t \times 4 = i_m \times 12 = i_d \times 360$$

i_a = taxa anual

i_s = taxa semestral

i_t = taxa trimestral

i_m = taxa mensal

- no regime de juros compostos, são ditas Equivalentes.

$$(1 + i_a) = (1 + i_s)^2 = (1 + i_t)^4 = (1 + i_m)^{12} = (1 + i_d)^{360}$$

10. Encontre a taxa de juros mensal correspondente à taxa de juros semestral de 34%, se o regime é de capitalização composta.

$$(1 + i_m)^6 = (1 + i_s)^1 \quad (1 + i_m)^6 = (1 + 0,34) \quad (1 + i_m)^6 = 1,34 \quad \left((1 + i_m)^6\right)^{\frac{1}{6}} = (1,34)^{\frac{1}{6}}$$
$$i_m = 1,34^{\frac{1}{6}} - 1 \quad \text{colocar no excel: } = (1,34)^{(1/6)} - 1 \quad i_m = 5\%$$

11. Determinar a taxa trimestral equivalente a 47,746% em dois anos.

Resp: 5%

12. Determinar a taxa anual equivalente a 0,19442% ao dia.

Resp: 101,22%

13. Quanto devo aplicar hoje, à taxa de 17% ao ano, para ter R\$ 1.000.000,00 no final de 19 meses?

Resp: R\$ 779.900,24

14. A aplicação de certo capital, à taxa de 18% ao ano, gerou um montante de R\$ 820.000,00 no final de 1 ano e 3 meses. Calcular o valor dos juros.

Resp: R\$ 153.252,58

15. Fiz uma aplicação em CDB no valor de R\$ 600.000,00 pelo prazo de 85 dias e estimo que a rentabilidade será de 3% ao bimestre. Qual é o montante final?

Resp: R\$ 625.658,46

DESCONTO

- Consiste no abatimento que o devedor faz jus quando antecipa o pagamento de um título, ou ainda, como sendo o juro cobrado pelo devedor para antecipar o pagamento de um título. Do ponto de vista do credor, define-se como sendo o juro cobrado por este para antecipar determinada quantia de vencimento futuro.
- Trata-se da diferença entre o valor nominal (valor futuro ou montante) e o valor atual de um compromisso que seja saldado n períodos antes do seu vencimento.
- Tipos:
 - Racional ou verdadeiro ou “por dentro” = desconto aplicado sobre o valor atual do título
 - Comercial ou bancário ou “por fora” = desconto aplicado sobre o valor nominal do título

$D = N - A$, onde:

N = valor nominal de um título, ou seja, valor do título no vencimento

A = valor atual ou valor líquido, ou seja, valor pelo qual o título é liquidado

D = desconto

Desconto Simples Racional

$$N = A \cdot (1 + t \cdot i) \quad D = A \cdot i \cdot t \quad \text{onde } t = \text{prazo do desconto}$$

Desconto Simples Comercial

$$A = N \cdot (1 - i \cdot t) \quad D = N \cdot i \cdot t$$

16. Uma nota promissória de valor nominal de R\$ 1.400,00 é resgatada dois meses antes de seu vencimento pelo desconto racional. Qual o valor pago no resgate sabendo-se que a taxa de juros simples é de 2,5% ao mês?

Resp: 1.333,33

17. Ao se apresentar um título para desconto comercial, 3 meses antes do seu vencimento, à taxa simples de 3,10% ao mês, obteve-se R\$ 4.650,00 de desconto. Determinar os valores atual e nominal do título.

Resp: N=50.000 e A=45.350

18. Determinar o prazo de um título de R\$ 65.000,00 que descontado, comercialmente a taxa simples de 3,30% ao mês resultou em R\$ 58.279,00 de valor líquido.

Resp: 94 dias

Desconto Composto Racional: $N = A \cdot (1 + i)^t$ onde t = prazo do desconto

Desconto Composto Comercial: $A = N \cdot (1 - i)^t$

19. Antecipando em dois meses o pagamento de um título, obtive um desconto racional composto, que foi calculado com base na taxa de 2% ao mês. Sendo R\$ 31.104,00 o valor nominal do título, quanto paguei por ele, em R\$?

Resp: 29.896,19

20. Uma empresa tomou empréstados de um banco R\$ 1.000,00 à taxa de juros compostos de 3,9% ao mês, por 6 meses. No entanto, 1 mês antes do vencimento, a empresa decidiu liquidar a dívida.

Qual o valor pago, em reais, se o banco opera com uma taxa de desconto racional composto de 2 % ao mês?

Resp: R\$ 1.233,37

21. Se existe a possibilidade de ganhar 1,2% ao mês capitalizados mensalmente, o desconto racional que devo exigir na compra de um título no valor nominal de R\$ 15.800,00, vencível em 2 meses, é, aproximadamente, em R\$?

Resp: R\$ 372,48

22. Antecipando em seis meses o pagamento de um título de valor nominal de R\$ 200.000,00, obtive um desconto comercial composto, a uma taxa de 1,5% ao mês. Indicar o valor do desconto e o valor líquido.

Resp: D = R\$ 17.338,35 e A = R\$ 182.661,70

PLANOS DE FINANCIAMENTOS

No pagamento de dívidas, a juros compostos, cada parcela de pagamento pode incluir:

- JUROS do período, calculados sobre o saldo da dívida no início do período;
- AMORTIZAÇÃO do principal, corresponde ao pagamento parcial (ou integral) do principal. Obtida pela diferença entre o valor da prestação e o valor do juros do período.

PRESTAÇÃO = AMORTIZAÇÃO + JUROS

- **SISTEMA DE AMORTIZAÇÕES CONSTANTES - SAC**

Essa modalidade de pagamento tem grande utilização em:

- financiamentos imobiliários
- financiamentos às empresas, por parte de várias entidades governamentais

Os juros de cada prestação vão diminuindo com o tempo, pois o principal remanescente vai se tornando cada vez menor. Todas as amortizações são iguais. Assim, o valor das prestações vai diminuindo com o tempo.

$$\text{AMORTIZAÇÃO} = \text{PRINCIPAL} \div \text{NPER}$$

R\$ 6.000 em 3 vezes a 10% ano				
	saldo devedor	amort	juros	prestação
0	6000,00	0,00	0,00	0,00
1	4000,00	2000,00	47,84	2047,84
2	2000,00	2000,00	31,90	2031,90
3	0,00	2000,00	15,95	2015,95

- **PAGAMENTO PERIÓDICO DE JUROS (Método Americano)**

O financiamento é pago da seguinte maneira:

- O capital é restituído integralmente ao final do prazo contratado.

- Os juros devidos são pagos após cada período de capitalização.

Obs.: Ao final do prazo contratado, além dos juros do último período, o principal é integralmente pago. Cabe destacar as seguintes aplicações dessa modalidade:

- papéis de renda fixa com renda paga periodicamente (por exemplo: Letras de Câmbio de renda mensal, Certificados de Depósitos de renda trimestral, NTN-B pagamento do juros semestralmente).

	R\$ 6.000 em 3 vezes a 3% ao mês			
	saldo devedor	amort	juros	prestação
0	6000,00	0,00	0,00	0,00
1	6000,00	0,00	180,00	180,00
2	6000,00	0,00	180,00	180,00
3		6000,00	180,00	6180,00

- **PAGAMENTO NO FINAL**

O financiamento é pago de uma única vez, no final do prazo contratado. Os juros são capitalizados ao final de cada período. O Principal e os Juros são pagos no final do prazo contratado.

Essa modalidade de pagamento é utilizada em vários problemas reais, cabendo destacar:

- papéis de renda fixa paga no final (por exemplo: Letras de Câmbio e Certificado de Depósitos com renda final);
- títulos descontados em banco comercial.

	R\$ 6.000 ao final de 3 meses a 3% ao mês			
	saldo devedor	amort	juros	prestação
0	6000,00	0,00	0,00	0,00
1	6000,00	0,00	0,00	0,00
2	6000,00	0,00	0,00	0,00
3		6000,00	556,36	6556,36

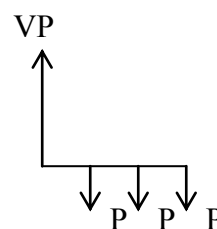
- **SISTEMA PRICE – PRESTAÇÕES IGUAIS**

Sua utilização é bastante difundida, cabendo ressaltar as aplicações em:

- financiamentos imobiliários
- pagamento de financiamentos de eletrodomésticos, automóveis,...

Os juros de cada prestação vão diminuindo com o tempo, pois o principal remanescente vai se tornando cada vez menor. Como o valor da prestação é constante, a parcela de amortização da cada prestação vai aumentando ao longo do tempo.

	R\$ 6.000 em 3 meses a 3% ao mês			
	saldo devedor	amort	juros	prestação
0	6000,00	0,00	0,00	0,00
1	4058,82	1941,18	180,00	2121,18
2	2059,40	1999,42	121,76	2121,18
3	0,00	2059,40	61,78	2121,18



Funções do Excel:

PGTO (taxa; nper; vp; vf; tipo) = valor de cada um dos pagamentos/recebimentos de uma série uniforme, que ocorre ao longo de uma série uniforme, que ocorre ao longo de todos os períodos de capitalização.

Com referência às convenções adotadas devemos destacar:

- Se a série uniforme **PGTO** for postecipada, isto é, se cada um dos valores da série ocorrer no final do período correspondente, o parâmetro **tipo** das funções financeiras deve ser informado como sendo igual zero.
- Se a série uniforme **PGTO** for antecipada, isto é, se cada um dos valores da série ocorrer no início do período correspondente, o parâmetro **tipo** das funções financeiras deve ser informado como sendo igual a um.

PPGTO (taxa; per; nper; vp; vf; tipo) = Amortização

IPGTO (taxa; per; nper; vp; vf; tipo) = Juros

23. Quanto acumularia um investidor no fim de 12 meses se depositasse mensalmente R\$ 3.000,00 em uma instituição que pagasse juros à taxa composta de 0,9% a.m.?

Resp: R\$ 37.836,56

24. Determinar o valor da prestação mensal que em 18 meses amortizaria um débito hoje de R\$ 80.000,00 para uma taxa de juros composta de 3% a.m.?

Resp: R\$ 5.816,70

25. Se uma pessoa deseja acumular a quantia de R\$ 50.000,00 no fim de 18 meses, quanto ela deve depositar mensalmente na poupança que pague uma taxa de 0,6% a.m.?

Resp: R\$ 2.638,79

26. Para uma taxa de juros composta de 2% a.m., determinar o valor atual de 25 pagamentos mensais de R\$ 4.800,00, o primeiro com vencimento para hoje.

Resp: R\$ 95.586,84

27. Um financiamento de R\$ 50.000,00 será pago com 60 prestações mensais e iguais, sendo a primeira daqui a 30 dias, a 0,8% de taxa de juros ao mês. Calcule a parcela de amortização da 10ª prestação.

Resp: R\$ 701,05

DESCONTO DE FLUXOS DE CAIXA

Denomina-se desconto de um fluxo de caixa a operação pela qual se calcula o seu valor atual (ou presente). Esta operação consiste basicamente em trazer para a data de hoje (zero da escala de tempo) as grandezas monetárias que ocorrem no futuro. A taxa de juros usada no desconto de um fluxo de caixa é a mesma para todas as suas parcelas.

FLUXOS DE CAIXA NÃO-HOMOGÊNEOS: VALOR ATUAL - FUNÇÃO VPL

Essa função exige que os fluxos de caixa tenham os seus valores informados de uma forma sequencial, não podendo ser omitidos os valores iguais a zero.

A fórmula da função financeira VPL calcula o valor atual líquido e tem a seguinte expressão:

= **VPL (taxa; valor1; valor2; ...)**, onde os parâmetros correspondem a:

Taxa - taxa de desconto, em %, que deve ser compatível com a unidade de medida do tempo dos períodos;

Valor1 - valor monetário do fluxo de caixa que está colocado no final do 1º período;

Valor2 - valor monetário do fluxo de caixa que está colocado no final do 2º período.

28. Calcular o valor atual do fluxo de caixa que consiste em 4 parcelas mensais iguais a R\$ 1.000,00 a partir de hoje e mais uma de hoje a 4 meses no valor de R\$ 3.000,00, para uma taxa de juros compostos de 3% ao mês.

Resp: R\$ 6.494,07

29. Calcular o valor atual do fluxo de caixa que consiste em 3 parcelas mensais iguais a R\$ 1.000,00, começando de hoje a 4 meses, para uma taxa de juros compostos de 3% ao mês.

Resp: R\$ 2.588,58

30. Calcular o valor atual do fluxo de caixa que consiste em 6 parcelas mensais começando de hoje a 30 dias sendo a três primeiras iguais a R\$ 200,00 e as três últimas iguais a R\$ 100,00, para uma taxa de juros compostos de 2% ao mês.

Resp: R\$ 848,53